

# فصل ۳

## تمرین های نظری

۴. یک توپ با احتمال  $p_i$  می تواند در جعبه  $i$  ام باشد. اگر با احتمال  $\alpha_i$  پس از جستجوی جعبه  $i$  ام توپ را پیدا کنیم، نشان دهید که احتمال اینکه توپ در جعبه  $i$  ام باشد به شرط اینکه در جستجوی جعبه  $i$  ام آن را پیدا نکرده ایم برابر است با

$$\begin{cases} \frac{P_j}{1 - \alpha_i p_i} & j \neq i \\ \frac{(1 - \alpha_i) p_i}{1 - \alpha_i p_i} & j = i \end{cases}$$

۱۴. آزمایشهای ساده مستقل با احتمال موفقیت  $p$  را به طور متوالی انجام می دهیم تا  $r$  موفقیت کسب شود. نشان دهید که احتمال اینکه دقیقاً  $n$  آزمایش ساده لازم باشد برابر است با

$$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

این نتیجه را برای حل مسأله امتیازها (مثال ۴-۹) به کار ببرید.

واهنمایی: برای رسیدن به  $r$  موفقیت در  $n$  آزمایش ساده، چند موفقیت باید در  $n-1$  آزمایش ساده اول رخ دهد؟

۱۵. آزمایشهای ساده مستقل با احتمال موفقیت  $p$  و احتمال شکست  $1-p$  را آزمایشهای ساده برنولی می نامیم. اگر  $P_n$  نشان دهنده احتمال اینکه  $n$  آزمایش ساده برنولی به تعداد زوج موفقیت منجر شود. (صفر را به عنوان یک عدد زوج در نظر بگیرید.) نشان دهید

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1} \quad n \geq 1$$

و با استفاده از این نتیجه و روش استقراء ثابت کنید

$$P_n = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}$$

## خودآزمایی

۱۴. آزمایشی را در نظر می‌گیریم که  $n$  نتیجه ممکن داشته باشد و نتیجه  $i$ ام با احتمال  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) اتفاق افتد  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . اگر دو آزمایش مستقل انجام گیرد با چه احتمالی نتیجه دومین آزمایش از نتیجه آزمایش اول بیشتر است؟

## فصل ۴

### سائل

۲. دو تاس منظم را پرتاب می‌کنیم. اگر  $X$  نشان دهنده حاصل ضرب نتیجه دو تاس باشد مطلوب است محاسبه  $P\{X=i\}$  برای  $i = 1, 2, \dots$ .

۲۷. یک مؤسسه بیمه، بیمه‌نامه‌ای را می‌نویسد که اگر در طول یک سال حادثه  $E$  اتفاق افتد باید مبلغ  $A$  را پرداخت نماید. اگر شرکت بیمه برآورد کند که پیشامد  $E$  با احتمال  $p$  در طول یک سال اتفاق می‌افتد چه مقدار باید حق بیمه را تنظیم نماید تا متوسط سود شرکت  $10\%$  درصد مبلغ  $A$  باشد؟

۴۲. فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال  $1-p$  مستقل از یکدیگر خراب می‌شوند. اگر در یک پرواز موفقیت‌آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما سالم باشند برای چه مقداری از  $p$ ، یک هواپیمای ۵موتوره مطمئن‌تر از یک هواپیمای سه‌موتوره است؟

۴۴. یک سیستم ماهواره‌ای از  $n$  جزء ساخته شده که اگر حداقل  $k$  جزء از آنها کار کند آنگاه سیستم فعال خواهد بود. در یک روز بارانی هر یک از اجزاء مستقل از یکدیگر با احتمال  $p_1$  کار می‌کنند در حالی که در یک روز غیربارانی هر کدام مستقل از یکدیگر با احتمال  $p_2$  کار خواهند کرد. اگر احتمال باران آمدن فردا برابر با  $\alpha$  باشد احتمال اینکه ماهواره کار کند چقدر است؟

۵۷. فرض کنید تعداد حوادثی که در یک بزرگراه در روز اتفاق می‌افتد یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر  $\lambda = 3$  باشد.

الف) احتمال اینکه امروز حداقل ۳ حادثه اتفاق افتد را به دست آورید.  
ب) بند (الف) را با این فرض که امروز حداقل یک حادثه اتفاق افتاده است تکرار کنید.

۶۳. افراد با نرخ ۱ نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می‌شوند.

الف) احتمال اینکه هیچ‌کس در فاصله ساعت ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد نشود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه حداقل ۴ نفر در آن زمان وارد فروشگاه شوند را به دست آورید.

۷۰. یک سکه منظم را به طور متوالی پرتاب می‌کنیم تا شیر برای دهمین مرتبه ظاهر شود. اگر  $X$  نشان دهنده تعداد خط‌های ظاهر شده باشد. تابع احتمال  $X$  را به دست آورید.

## تمرین‌های نظری

۴. اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع توزیع تجمعی  $F$  باشد تابع توزیع تجمعی  $e^X$  چیست؟

۹. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با امید ریاضی  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  است. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی  $Y = (X - \mu) / \sigma$  را به دست آورید.

۱۰. اگر  $X$  یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای  $n$  و  $p$  باشد نشان دهید

$$E \left[ \frac{1}{X+1} \right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

۱۶. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد. نشان دهید که  $P\{X=i\}$  با افزایش  $i$  ابتدا صعودی یکنوا و سپس نزولی یکنوا است و زمانی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که  $i$  بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از  $\lambda$  است.

راهنمایی: نسبت  $P\{X=i\} / P\{X=i-1\}$  را در نظر بگیرید.

۲۴. رابطه زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{i=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

راهنمایی: از انتگرال جزء به جزء استفاده کنید.

خودآزمایی

۱۸. فرض کنید  $P\{X=a\} = p$  و  $P\{X=b\} = 1-p$

الف) نشان دهید  $\frac{X-b}{a-b}$  یک متغیر تصادفی برنولی است.

ب)  $\text{Var}(x)$  را به دست آورید.